

С.В. ЕНДИЯРОВ,
С.Ю. ПЕТРУШЕНКО

**Управление сложным техническим
объектом в реальном масштабе
времени на основе алгоритма
определения разладки процесса**

УДК 004.89, 519.2, 519.85

Уральский
государственный
горный университет,
г. Екатеринбург

Представлен алгоритм обнаружения изменения сигнала, основанный на непрерывном гауссовом вейвлет преобразовании. Рассматривается метод преобразования исходного сигнала с помощью непрерывного вейвлет-преобразования. Предложен вероятностный алгоритм обнаружения точек изменения контролируемого сигнала.

Классические методы обнаружения изменения среднего значения сигнала в реальном масштабе времени, такие как последовательный анализ Вальда, алгоритм кумулятивных сумм, контрольные карты скользящего среднего, алгоритмы фильтрованной производной, Байесовские алгоритмы и другие, в значительной мере зависят от функции распределения сигнала, наличия в сигнале аномальных выбросов и шума. Более того, показатели обнаружения изменений с использованием перечисленных алгоритмов значительно ухудшаются с увеличением интервала дискретизации сигнала.

В данной статье мы рассматриваем робастный алгоритм обнаружения изменений среднего значения сигнала, который позволяет эффективно справляться с вышеперечисленными трудностями. Мы рассмотрим все необходимые шаги, начиная с преобразования исходного сигнала, заканчивая применением алгоритма обнаружения изменений. В статье так же рассматривается сравнение производительности алгоритмов кумулятивных сумм и последовательного анализа Вальда с предложенным нами алгоритмом.

Преобразование исходного сигнала

Изменения нестационарного сигнала могут быть обнаружены по коэффициентам непрерывного вейвлет преобразования. В данной части мы подробно рассмотрим шаги, необходимые для обработки сигнала и его преобразования с целью идентификации изменений.

Первым шагом в обнаружении изменений сигнала является осуществление вейвлет преобразование сигнала, вычисление максимумов и минимумов коэффициентов вейвлет преобразования, использование этих данных для локализации и обнаружения точек изменения.

Так как ряды максимумов и минимумов строятся на основе коэффициентов вейвлет преобразования, необходимо иметь в виду, что коэффициенты вейвлет преобразования вблизи начала ряда и его конца искажаются в связи с тем, что в общем случае среднее значение вейвлет функции равно нулю [1].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (10)$$

Поэтому перед использованием вейвлет коэффициентов необходимо произвести преобразование исходного ряда, а именно необходимо увеличить исходный ряд с начала и с конца на величину, определяемую носителем вейвлет функции. Далее в данной статье мы будем использовать вейвлет преобразование Гаусса первого порядка в связи с тем, что использование данного преобразования позволяет лучше локализовать изменения. Гауссов вейвлет n порядка имеет следующий вид:

$$\Psi_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (11)$$

В нашем случае используется вейвлет первого порядка $n=1$:

$$\Psi_1(x) = \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad (12)$$

Гауссов вейвлет первого порядка имеет компактный носитель на отрезке $x \in [-5; 5]$. Поэтому для заданного уровня вейвлет преобразования L необходимое количество элементов, которые необходимо добавить к исходному ряду, можно рассчитать так :

$$N^+ = L \cdot R \quad (13)$$

где R – ширина левой или правой части вейвлета.

Для случая Гауссова вейвлета $R=5$ поэтому, например, для заданного уровня $L=128$, количество дополнительных элементов, которые необходимо добавить к ряду N^+ равно $N^+ = 128 \cdot 5 = 640$. Однако данное число можно уменьшить в связи с тем, что Гауссова вейвлет функция убывает очень быстро, поэтому на практике для значения R можно без значительной потери точности пользоваться $R=3$. Как показывают наши эксперименты, оптимальное значение для L находится в диапазоне $L \in [64, \infty]$, для рассматриваемых нами сигналов, генерирование которых будет рассмотрено позже.

Обозначим значения ряда в момент времени t через $U(t)$ тогда значение $U(1)$ обозначает значение ряда в момент времени $t=1$, а $U(n)$ значение ряда в момент времени $t=n$ соответственно. В соответствии с нашими обозначениями запишем выражение для модифицированного ряда :

$$\mathcal{U}(t) = U(0)_{N^+} + U(t) + U(N)_{N^+} \quad (14)$$

где N – длина исходного временного ряда, а выражение $U(0)_{N^+}$ означает добавление к ряду N^+ элементов $U(0)$.

По данным преобразованного временного ряда находится непрерывное вейвлет преобразование. Формула для непрерывного вейвлет преобразования имеет вид [1]:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (15)$$

Так как большинство сигналов, используемых на практике, являются лишь оцифрованной версией непрерывных сигналов, представляющих собой числовые последовательности, то для того, чтобы воспользоваться выражением (15) необходимо произвести преобразования данного выражения.

Дискретный сигнал $\mathcal{U}(t)$ можно представить в виде [2]:

$$\mathcal{U}_\delta(t) = \mathcal{U}(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(t) \cdot \delta(t - nT) \quad (16)$$

где $\mathcal{U}_\delta(t)$ – непрерывный сигнал, принимающий ненулевые значения в точках $\mathcal{U}(nT)$. Подставляя выражение $\mathcal{U}_\delta(t)$ в формулу для непрерывного вейвлет преобразования получим:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\mathcal{U}(t) \cdot \delta(t - nT)] \cdot \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(t) \cdot \delta(t - nT) \cdot \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (17)$$

Принимая во внимание свойства, дельта функции Дирака окончательно получим:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{t=0}^{N-1} \delta(t) \cdot \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (18)$$

Формулы для вычисления абсолютных максимумов и минимумов по коэффициентам вейвлет преобразования выглядят так:

$$W_{\min}(b) = \left| \min_{1 \leq a \leq K} \{W(a,b)\} \right| \quad (19)$$

$$W_{\max}(b) = \left| \max_{1 \leq a \leq K} \{W(a,b)\} \right| \quad (20)$$

где K – заданный максимальный уровень вейвлет преобразования.

После полученных преобразований необходимо вычислить суммарный сигнал, с которым мы и будем работать дальше. Суммарный сигнал вычисляется так:

$$W_{\Sigma}(b) = \sum_{b=0}^{N-1} (W_{\max}(b) + W_{\min}(b)) \quad (21)$$

где, $b \in [0, N-1]$ а N – длина исходного ряда. Для получения достаточно надежной оценки математического ожидания и дисперсии, количество точек N должно быть достаточно большим, от 30 и выше.

Формулы для определения оценок математического ожидания и дисперсии максимумов и минимумов по всем масштабным коэффициентам:

$$E[W_{\max}(b)] = \frac{\sum_{b=0}^{N-1} \max_{1 \leq a \leq K} \{W(a,b)\}}{N} \quad (22)$$

$$D[W_{\max}(b)] = \sum_{b=0}^{N-1} (W_{\max}(b) - E[W_{\max}(b)])^2 / N \quad (23)$$

Дисперсия суммы сигналов:

$$D_{\Sigma}[W_{\Sigma}(b)] = D[W_{\max}(b)] + D[W_{\min}(b)] \quad (24)$$

Несмотря на то, что математическое ожидание коэффициентов вейвлет преобразования равно «0» это не справедливо для тех преобразований, которые мы произвели. Поэтому математическое ожидание суммарного сигнала вычисляется аналогично дисперсии:

$$E_{\Sigma}[W_{\Sigma}(b)] = E[W_{\max}(b)] + E[W_{\min}(b)] \quad (25)$$

Начальные оценки дисперсии и математического ожидания необходимы в дальнейшем для использования в алгоритме обнаружения изменений.

Алгоритм подсчета вероятностей

В основе данного алгоритма лежит классическая теория проверки статистических гипотез, так же, как и в алгоритмах Вальда и кумулятивных сумм выдвигаются две гипотезы [3]. Нулевая гипотеза H_0 свидетельствует о том, что никаких изменений не произошло и соответственно H_1 , что изменение произошло.

Пусть $p_{u\lim}$ есть предельная вероятность того что событие H_1 произошло соответственно вероятность $\alpha = 1 - p_{u\lim}$ это вероятность того что событие H_1 не произошло. В соответствии с теоремой умножения вероятностей независимых событий определим суммарную вероятность в виде [4]:

$$P_{\Sigma}(t) = P(W_{\Sigma}(1)) \cdot P(W_{\Sigma}(2)) \cdot \dots \cdot P(W_{\Sigma}(t)) = \prod_{j=1}^t P(W_{\Sigma}(j)) \quad (26)$$

Будем продолжать наблюдения до тех пор, пока суммарная вероятность $P_{\Sigma}(t) > p_{u\lim}$. При этом вносим запаздывание для того, чтобы сделать подсчет вероятностей более «робастным» относительно функции распределения исходных данных, поэтому будем начинать подсчет вероятностей с заданного уровня H_U . Параметр H_U может быть задан в виде вектора, в случае если требуется более тонкая настройка:

$$H_U^T = (h_0, h_1, \dots, h_k, \dots, h_n) \quad (27)$$

Применим технику, которая популярна при построении контрольных карт. И будем начинать подсчет вероятностей, когда $W_{\Sigma}(t) \geq H_U(j)$. Где $H_U(j)$ обозначает j элемент вектора H_U :

$$H_U(j) = E[W_{\Sigma}(b)] + \Lambda(j) \cdot \sqrt{D[W_{\Sigma}(b)]} \quad (28)$$

где $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – вектор параметров. Затем рассчитывается вероятность того, что $W_{\Sigma}(t) \geq H_U$, тогда из теории вероятностей:

$$P(W_{\Sigma}(k) \geq H_U(j)) = 1 - \int_{-\infty}^{H_U(j)} f(W) dW \quad (29)$$

где $f(W)$ – интегральная функция распределения вероятностей.

Для случая нормального распределения данное выражение может быть записано так:

$$P(|W_{\Sigma}(k) - E[W_{\Sigma}(k)]| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon / \sqrt{D[W_{\Sigma}(b)]}) \quad (30)$$

Учитывая односторонность нашего условия, выражение переписывается в виде:

$$P(W_{\Sigma}(k) - E[W_{\Sigma}(k)] \geq H_U(j)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi(H_U(j) / \sqrt{D[W_{\Sigma}(b)]}) \quad (31)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа [4] :

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx \quad (32)$$

Параметры λ_j являются настроечными и могут быть выбраны в зависимости от характеристик полученного сигнала, а так же от особенностей изменений.

Например, для нормального распределения можно положить $\Lambda^T = (1, 2, 3)$, для случая с известной дисперсией или использовать t-таблицу. Для отбраковки аномальных выбросов следует принимать $P_{\Sigma}(t) = 1$ всегда, когда $W_{\Sigma}(t)$ становится меньше параметра H_U то есть:

$$W_{\Sigma}(t) < E[W_{\Sigma}(b)] + \Lambda(j) \cdot \sqrt{D[W_{\Sigma}(b)]} \quad (33)$$

После того как обнаружение произведено необходимо прекратить подсчет вероятностей до тех пор, пока мы не спустились с «горы». Для этого введем еще один параметр H_D . Параметр H_D задается таким образом, чтобы после обнаружения изменения новые наблюдения начинались лишь тогда когда $W_{\Sigma}(t) \leq H_D$.

Поэтому параметр H_D предлагается задавать в виде:

$$H_D = E[W_{\Sigma}(b)] + \beta \cdot \sqrt{D[W_{\Sigma}(b)]} \quad (34)$$

Параметр β является настроечным, так же как и параметры λ_j и может быть выбран в зависимости от характеристик полученного сигнала, например для нашего случая параметр $\beta = 0$, что соответствует случаю пересечения случайной величиной $W_{\Sigma}(t)$ ее математического ожидания. Стоит отметить, что параметр β так же может представлять собой вектор $\Omega^T = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$. Таким образом, задаваясь параметрами p_{ulim} , H_U и H_D можно определять точки изменения сигнала.

Для проверки алгоритма будем использовать сгенерированные ряды по CaO и Fe, характеризующие свойства шихты, поступающие на агломерацию. Генерация осуществляется с использованием выражения:

$$S(t, n) = N(M(n), \sigma^2) + Z(t) \cdot \varepsilon \pm N(0, \sigma^2) \quad (35)$$

где $N(M(n), \sigma^2)$ – нормальное распределение с дисперсией σ^2 и математическим ожиданием $M(n)$, $Z(t) \cdot \varepsilon$ – переключатель, который

вносит аномальный выброс в сигнал (величина $Z(t)$ принимает значения «1» и «0» с вероятностью $p=0.5$, а величина ε значения из диапазона $a \leq \varepsilon \leq b$ с вероятностью, распределенной по равномерному закону), $N(0, \sigma^2)$ – шум, вносимый датчиком измерения химического состава. Для моделирования рядов были использованы следующие численные значения параметров: $\sigma_{Fe}^2 = 0.5^2$, $\sigma_{CaO}^2 = 0.3^2$, $\sigma_{Fe}^2 = 1^2$, $\sigma_{CaO}^2 = 0.5^2$, $-5 \leq \varepsilon_{Fe} \leq 5$, $-1 \leq \varepsilon_{CaO} \leq 1$. Начальные значения математических ожиданий: $M_{Fe}(0) = 60.7$ и $M_{CaO}(0) = 3.71$. В каждый ряд было внесено шесть точек изменения (изменялись оценки математических ожиданий $M(n)$). Например, для Fe выражение, изменяющее математическое ожидание, выглядит так :

$$M_{Fe}(n+1) = M_{Fe}(n) \pm Z(t) \cdot 2\sigma_{Fe} \quad (36)$$

Результаты работы алгоритма показаны на рисунке 10.

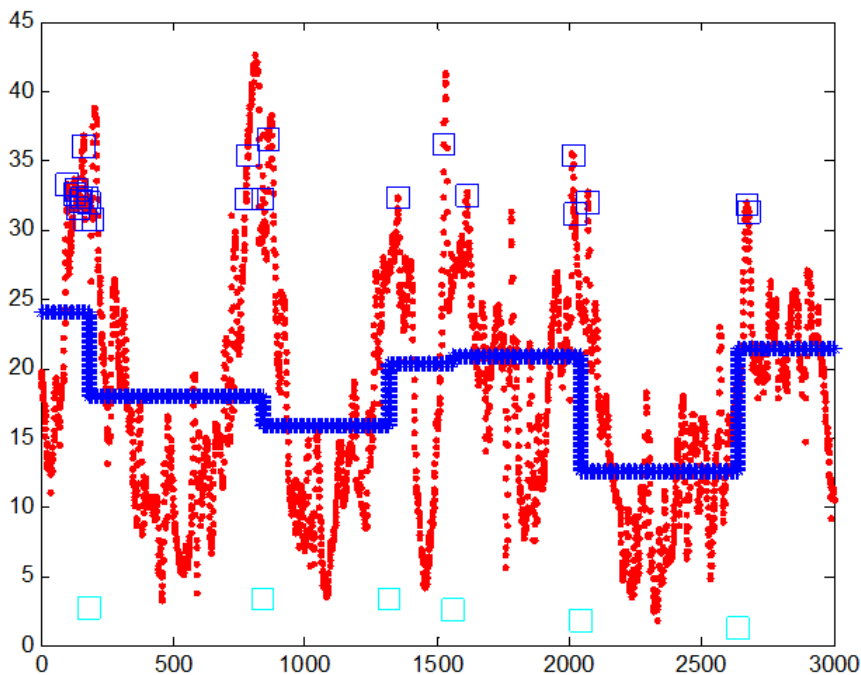


Рис. 10. Применение метода подсчета вероятностей для ряда Fe (синие квадраты – точки обнаруженные алгоритмом, циан – реальные точки изменений; по оси ординат – значение вейвлет преобразования сигнала, по оси абсцисс – время в минутах; толстая синяя линия – математическое ожидание).

Из рисунка видно, что алгоритм обнаруживает значительное количество лишних точек. Причиной такого поведения служит наличие в сигнале аномальных выбросов и шума.

Рассмотрим эту проблему более детально (рисунок 11). Из рисунка видно, что алгоритм обнаружил точку изменения сигнала

(первая точка на рисунке), а затем он согласно условию $W_{\Sigma}(t) \leq H_D$ отключается до тех пор, пока реализация сигнала не пересечет математическое ожидание $W_{\Sigma}(t)$.

Из рисунка видно, что вторая точка была обнаружена вследствие того, что в сигнале произошел аномальный выброс.

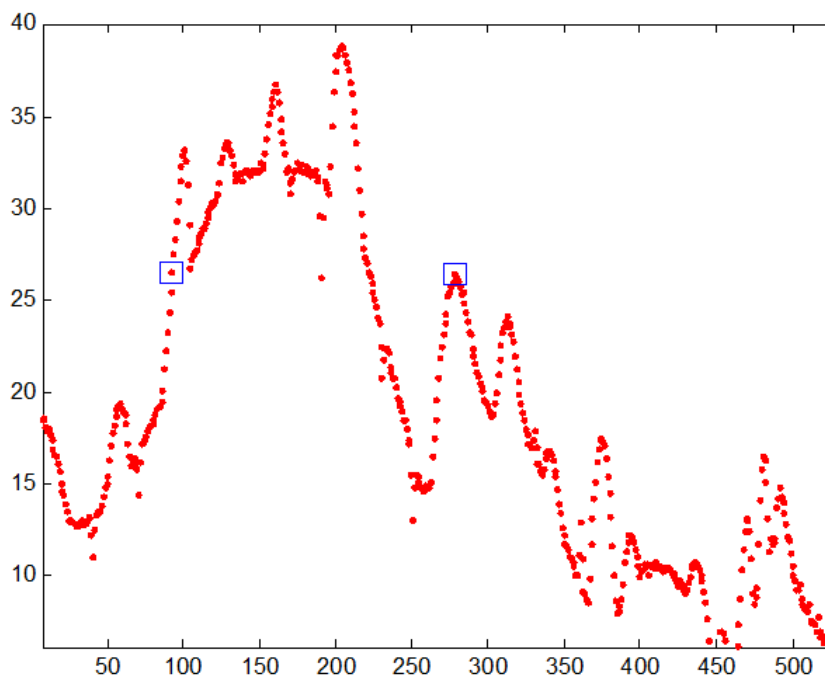


Рис. 11. Лишняя обнаруженная точка вследствие аномального выброса (крайний правый квадрат)

Для того, чтобы сделать алгоритм «робастным» по отношению к выбросам и шуму введем следующую величину $P_{\Sigma}^D(t)$. Смысл ее аналогичен суммарной вероятности, которая была рассмотрена выше. Только для случая с $P_{\Sigma}^D(t)$ расчет по формуле (26) начинается, как только $W_{\Sigma}(t) \leq H_D$. При этом рассчитываются вероятности того, что случайная величина $W_{\Sigma}(t)$ пересекла границу H_D .

По аналогии с суммарной вероятностью следует принимать $P_{\Sigma}^D(t) = 1$ всегда, когда $W_{\Sigma}(t)$ становится больше параметра H_D то есть когда :

$$W_{\Sigma}(t) > E[W_{\Sigma}(b)] + \beta \cdot \sqrt{D[W_{\Sigma}(b)]} \quad (37)$$

Обозначим предельную вероятность для данного случая как $p_{d\lim}$. Как показывает практика значение $p_{d\lim}$ удобно задавать так что

$$p_{u\lim} = p_{d\lim} \cdot$$

Стоит заметить, что величина H_D может использоваться как настроечный параметр и для случая «близких» событий, то есть когда изменения сигнала могут происходить в окрестности друг друга в этом случае значение параметра H_D стоит увеличить. На рисунке 12 показаны результаты работы алгоритма для тестового ряда по Fe.

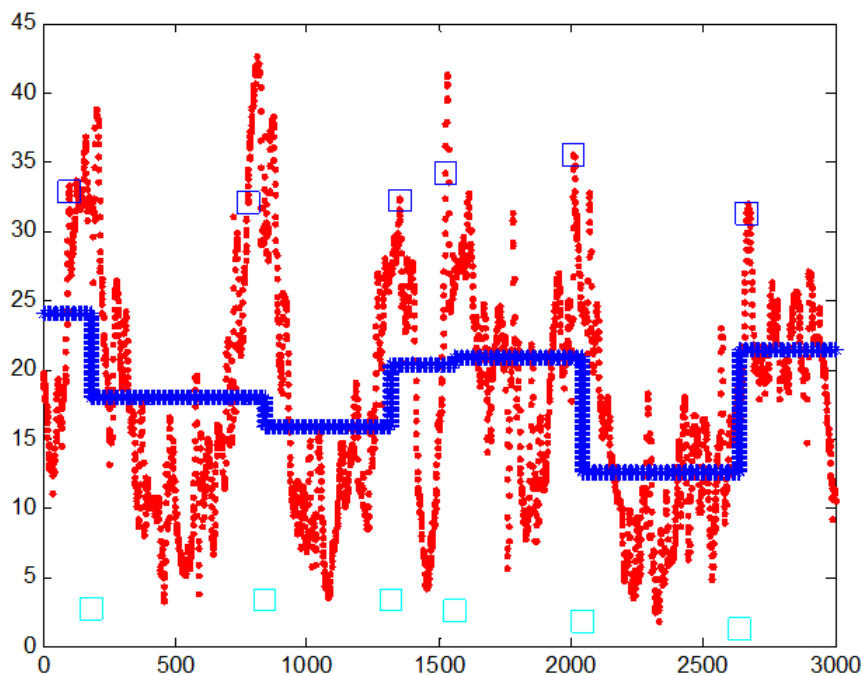


Рис. 12. Результат работы алгоритма для ряда Fe (синие квадраты – точки обнаруженные алгоритмом, циан – реальные точки изменений).

Как видно из рисунка алгоритм хорошо справляется со своей задачей и для рядов Fe и CaO точно определяет все шесть изменений сигнала.

Экспериментальное тестирование и сравнение алгоритмов обнаружения разладки

Формально рассмотрим сравнение различных алгоритмов обнаружения разладки. Имеется конечный набор алгоритмов обнаружения разладки :

$$F \in A \quad (38)$$

Определение наилучшего алгоритма сводится к задаче упорядочения рассматриваемых алгоритмов на некотором классе K . В этом случае наилучший алгоритм удовлетворяет условию :

$$W(F^*) \leq W(F^i), \forall F^i \in A_{F^*} \quad (39)$$

Из (39) следует, что сравнение алгоритмов между собой имеет смысл только в том случае, если параметры каждого алгоритма имеют оптимальные значения.

Нами были рассмотрены два алгоритма обнаружения изменений, а именно алгоритм кумулятивных сумм и последовательный анализ Вальда. Данные алгоритмы, а так же предложенный нами алгоритм использовались для определения точек разладки (изменения среднего значения сигнала). Результаты работы алгоритмов на тестовых сигналах Fe и CaO представлены в таблице 1.

Таблица 5

Результаты работы алгоритма на рядах Fe и CaO

Алгоритм подсчета вероятностей				
Параметры для ряда Fe	Обнаружено точек	Мат. ожидание	Ложн. обнар.	Дисперсия
$\Lambda^T = (1.5, 2, 2.5, 3), \beta = 0, p_{u\lim} = 0.005$	6	44,2	0	368,8
Параметры для ряда CaO	Обнаружено точек	Мат. ожидание	Ложн. обнар.	Дисперсия
$\Lambda^T = (1, 2, 2.5, 3), \beta = 0, p_{u\lim} = 0.006$	6	41,8	0	350,4
Алгоритм кумулятивных сумм				
Параметры для ряда Fe	Обнаружено точек	Мат. ожидание	Ложн. обнар.	Дисперсия
$h=16$	26	32,0	20	26598,8
Параметры для ряда CaO	Обнаружено точек	Мат. ожидание	Ложн. обнар.	Дисперсия
$h=10$	34	76,8	28	2336962,2
Последовательный анализ Вальда				
Параметры для ряда Fe	Обнаружено точек	Мат. ожидание	Ложн. обнар.	Дисперсия
$\alpha = 0.01, \beta = 0.01$	22	61,5	16	27303,5
Параметры для ряда CaO	Обнаружено точек	Мат. ожидание	Ложн. обнар.	Дисперсия
$\alpha = 0.01, \beta = 0.04$	60	63,5	54	1826981,8

Из таблицы 1 видно, что предложенный нами алгоритм лучше справляется с задачей обнаружения разладки и обнаруживает все шесть точек из шести, при этом не обнаруживает ни одной лишней точки. Тогда как алгоритмы кумулятивных сумм и последовательного анализа Вальда показывают значительно худшие результаты.

Литература

1. Burrus C., Ramesh A. Introduction to wavelets and wavelet transforms: A Primer/ C. Burrus, A. Ramesh. – USA.: Prentice hall, 1998. – 281 p.
2. Popov A., Zhukov M., Computation of continuous wavelet transform of discrete signals with adapted mother functions, Proceedings of the SPIE, Volume 7502 , pp. 75021E-75021E-6, 2009.
3. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: Пер. с англ./М. Бассвиль, А. Вилски, А. Банвенист и др.; Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. – М.: Мир, 1989. – 278 с., ил.
4. Математическая статистика: Учебник/Иванова В.М., Калинина В. Н., Нешумова Л. А. и др. – 2-е изд, перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 371 с., ил.

E-MAIL: ENDEYAROV@OLYMPUS.RU

E-MAIL: VETRODUB@GMAIL.COM