И.В. ЗАЙЦЕВА,
Д.Ю. ЯКОВЦОВ,
А.П. ШВЕДЕНКО

Построение математической модели резервирования компьютерной системы предприятия

УДК 004.942

ФГАОУ ВПО
«Северо - Кавказский федеральный университет»
г. Ставрополь

В статье рассматривается математическая модель резервирования компьютерной системы. Производится оптимизация резервирования компьютерной системы.

Резервирование является одним из простых и достаточно эффективных методов повышения надежности. Однако при резервировании возникает задача не только обеспечить заданные показатели надежности, но добиться этого как можно более экономично, с наименьшими суммарными затратами на резервные элементы для системы в целом, либо при заданных ресурсных ограничениях достичь максимально возможной надежности.

Задача оптимального резервирования чаще возникает в отказоустойчивых системах позволяющих пользователю или функциональной программе продолжать работу и тогда, когда в аппаратных или программных средствах системы возникают отказы. При проектировании таких систем следует стремиться не только к достижению необходимой их надежности, но и к достижению этой надежности при минимальных средствах, т.е. к нахождению оптимального решения.

В отказоустойчивых компьютерных системах и машинах существует ряд параметров, от которых зависит надежность системы. Сюда относится количество резервных элементов, устройств или подсистем; параметры систем контроля и диагностики; характеристики системы программного обеспечения; величины, характеризующие архитектуру, конфигурацию работы системы и другие.

Надежность представляется в виде функциональной зависимости от перечисленных параметров. В качестве подобных ограничивающих ресурсов можно рассмотреть стоимость, массу, габаритные размеры, потребляемую мощность и т.п. Выбор вида ограничивающего ресурса определяется конкретным типом системы и ее назначением [1].

Одной из проблем оптимального резервирования является определение количества резервных элементов при заданном числе ремонтников.

Второй проблемой оптимального резервирования является определение количества ремонтников при заданном количестве резервных элементов.

И наконец, третьей проблемой является определение фактического количества резервных элементов и фактического количества ремонтников, чтобы надежность системы достигала требуемого значения, а ее стоимость была минимальной.

Введем следующие обозначения:

-n – количество последовательно соединенных подсистем;

-n_j – количество элементов в j-й подсистеме;

-k_j – количество основных элементов в j-й подсистеме;

-m_j— максимально возможное количество избыточных элементов в j-й подсистеме;

-x_j — количество избыточных элементов в j-й подсистеме, $0 \le x_j \le m_j$;

-r_j – максимально возможное количество ремонтных единиц, которые могут обслуживать в j-ю подсистему;

-y_j – количество ремонтных единиц, которые могут обслуживать j-ю подсистему, $0 \le y_j \le r_j$;

-p_j – стоимость одного резервного элемента j-й подсистемы;

-q_j – стоимость одной ремонтной единицы, обслуживающей j-ю подсистему;

-$f_j(t), g_j(t)$ – плотности распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов j-й подсистемы;

-$\bar{F}_j(t),\ \bar{G}_j(t)$ – вероятность безотказной работы и вероятность невосстановления за время t элементов j-й подсистемы;

-$K_{\text{г}j}(t), K_{\text{п}j}(t)$ — функция готовности и функция простоя для элементов j-й подсистемы, $\rho(t) = \frac{K_{\text{п}j}(t)}{K_{\text{г}j}(t)}$;

-$K_{\text{г}j}^{(s)}(t), K_{\text{п}j}^{(s)}(t)$ – функция готовности и функция простоя для j-й подсистемы;

-$K_{\text{г}}(t), K_{\text{п}}(t)$ — функция готовности и функция простоя для всей системы;

-$t_{\text{д}}, K_{\text{д}}$ – заданный момент времени и требуемый уровень функции готовности соответственно.

Построим математическую модель резервирования компьютерной системы исходя из следующих предположений:

-время безотказной работы элементов имеет произвольное распределение.

-восстановление элементов осуществляется заменой новыми элементами.

-время восстановления отказавших элементов имеет произвольное распределение.

-во время восстановления системы все остальные элементы выключаются из работы и не расходуют свой ресурс.

-все отказы статически независимы.

-при восстановлении элемента из подсистемы с ненагруженным резервом он становится в ненагруженный резерв.

-переключающее на резерв устройство производится по прямому приоритету.

-восстановление отказавших элементов производится по прямому приоритету.

-отказавшие элементы из разных подсистем могут ремонтироваться одновременно.

Алгоритм оптимизации резервированной системы:

1.Определить количество подсистем в резервированной системе.

2.Определить элементы подсистем, нуждающиеся в резервировании.

3. Рассчитать показатели надежности для этих элементов.

4. Рассчитать функцию готовности системы.

5. Рассчитать стоимость системы резервирования.

6. Определить количество основных элементов и количество ремонтных единиц для каждой подсистемы.

Выражение для функции готовности системы:

$$K_{\text{г}}(t) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\frac{K_{\text{п}j}^{(s)}(t)}{K_{\text{г}j}^{(s)}(t)}}, \tag{1}$$

Для оценки надежности системы с нагруженным или не нагруженным резервом можно использовать выражение:

$$K_{\text{г}j}^{(s)}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{x_j} M_{ji}(\rho_j(t))^i}{\sum_{i=1}^{x_j+1} M_{ji}(\rho_j(t))^i}, \; K_{\text{п}j}^{(s)}(t) = 1 - K_{\text{г}j}^{(s)}(t).$$

Тогда

$$\frac{K_{\text{п}j}^{(s)}(t)}{K_{\text{г}j}^{(s)}(t)} = \frac{M_{j,x_j+1}(\rho_j(t))^{x_j+1}}{\sum_{i=1}^{x_j} M_{ji}(\rho_j(t))^i}. \tag{2}$$

Постоянные коэффициенты M_{ji} определяются формулами:

- для нагруженного резерва

$M_{ji} = \frac{A_{k_j+x_j}^i}{i!}$, при $i \le y_j$;

$M_{ji} = \frac{A_{k_j+x_j}^i}{y_j! y_j^{i-y_j}}$, при $i > y_j$;

- для ненагруженного резерва

$M_{ji} = \frac{k_j^i}{i!}$, при $i \le y_j$;

$M_{ji} = \frac{k_j^i}{y_j! y_j^{i-y_j}}$, при $i > y_j$,

где $0 \le x_j \le m_j$, $0 \le y_j \le r_j$.

Неравенство $K_{\text{г}}(t_{\text{д}}) \ge K_{\text{д}}$ согласно (1) эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{K_{\text{п}j}^{(s)}(t_{\text{д}})}{K_{\text{г}j}^{(s)}(t_{\text{д}})} \le \frac{1}{K_{\text{д}}} - 1,$$

а согласно (2) оно эквивалентно также неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{M_{j,x_j+1}(\rho_j(t))^{x_j+1}}{\sum_{i=1}^{x_j} M_{ji}(\rho_j(t))^i} \le \frac{1}{K_д} - 1.$$

В других обозначениях получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j, y_j) \le b_д,$$

где

$$\varphi_j(x_j, y_j) = \frac{M_{j,x_j+1}(\rho_j(t_д))^{x_j+1}}{\sum_{i=1}^{x_j} M_{ji}(\rho_j(t_д))^i},\ b_д = \frac{1}{K_д} - 1.$$

Суммарная стоимость x_j резервных элементов и y_j ремонтных единиц равна

$z = \sum_{j=1}^{n}(p_j x_j + q_j y_j)$. [2-3]

Таким образом, речь идет об отыскании оптимальных значений x_j и y_j $j = 1,2,\dots,n$, для которых целевая функция достигает наименьшего значения

$$z = \sum_{j=1}^{n}(p_j x_j + q_j y_j) \to min \quad (3)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j, y_j) \le b_д,\ 0 \le x_j \le m_j,\ 0 \le y_j \le r_j. \quad (4)$$

Оптимизация резервирования компьютерной системы

Рассмотрим компьютерную систему предприятия, состоящую из пяти подсистем. На рисунке 1 приведена данная система. Данные по этой системы приведены в таблице 1. Где указаны: тип элементов резервирования для каждой из подсистем (нагруженный, не нагруженный), количество основных элементов в подсистемах, максимальное количество избыточных элементов и ремонтных единиц для каждой подсистемы, а также их стоимость, плотности распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов подсистем. Для системы заданы ограничения на функцию готовности $K_д = 0{,}99$ в моменты $t_д = 2000$ час и $t_д = 850$ час.

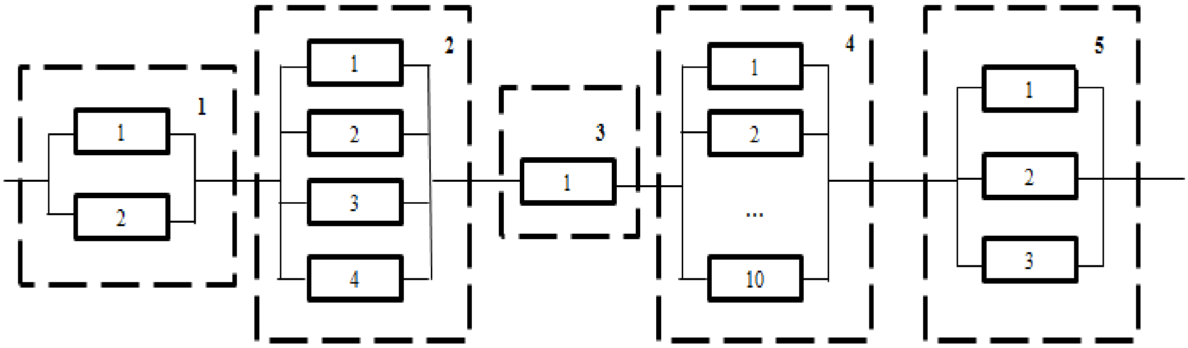

Рис. 1. Структурная схема резервированной системы

Исходные данные для оптимизации резервированной системы представлены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для оптимизации системы

Подсистема	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Тип	Не нагруженный	Не нагруженный	Нагруженный	Нагруженный	Не нагруженный
k_j	2	4	1	10	3
m_j	5	8	10	10	4
r_j	4	3	10	15	5
p_j	20	15	12	20	40
q_j	8	4	15	10	22
f_j	нормальное	нормальное	гамма	Рэлея	Рэлея
Математическое ожидание	100	100	120	140	80
Среднее квадратическое отклонение	350	500	150	1000	1250
g_j	равномерное	нормальное	нормальное	гамма	Рэлея
Математическое ожидание	100	100	120	140	80
Среднее квадратическое отклоне-	45	45	70	50	40

ние					

Таблица 2

Результаты оптимизации системы

Проблема	$t_д$	$K(t_д)$	**Стоимость системы, z**	**Резервные элементы, x**	**Ремонтные бригады, y**
1	850	0,9934	672	2 2 4 3 1	
2	850	0,9977	789		1 1 3 1 1
3	850	0,9904	351	2 2 5 3 1	2 2 3 3 1
1	2000	0,9925	695	2 3 3 4 1	
2	2000	0,9963	796		1 1 1 2 1
3	2000	0,9905	404	2 3 2 4 2	2 3 3 4 1

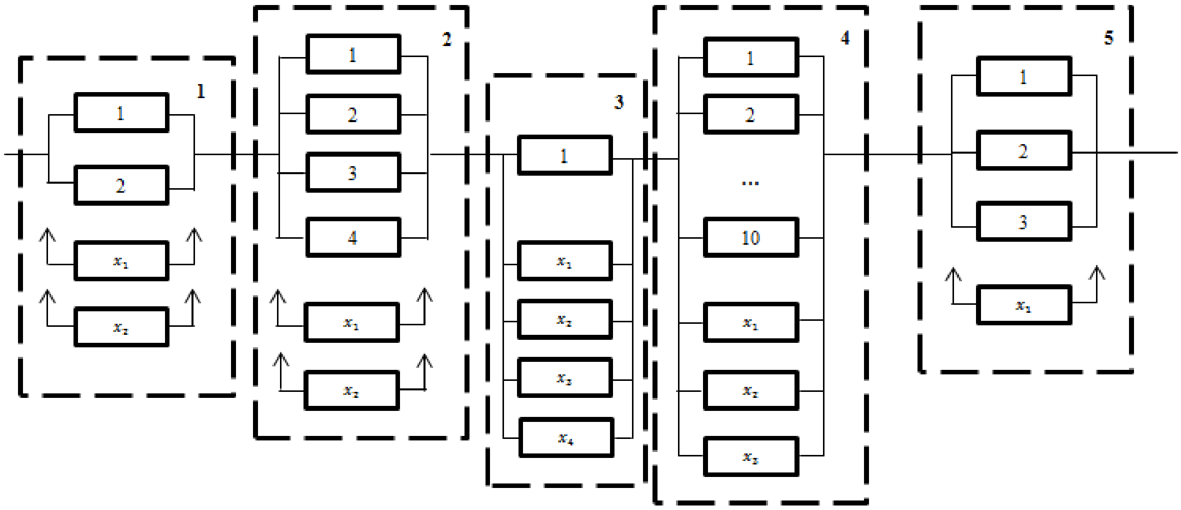

Рис. 2. Структурная схема оптимизированной резервированной системы при $t_д = 850$

На рисунке 2 и рисунке 3 изображены структурные схемы оптимизированных резервированных систем для проблемы определения количества резервных элементов при заданном числе ремонтников.

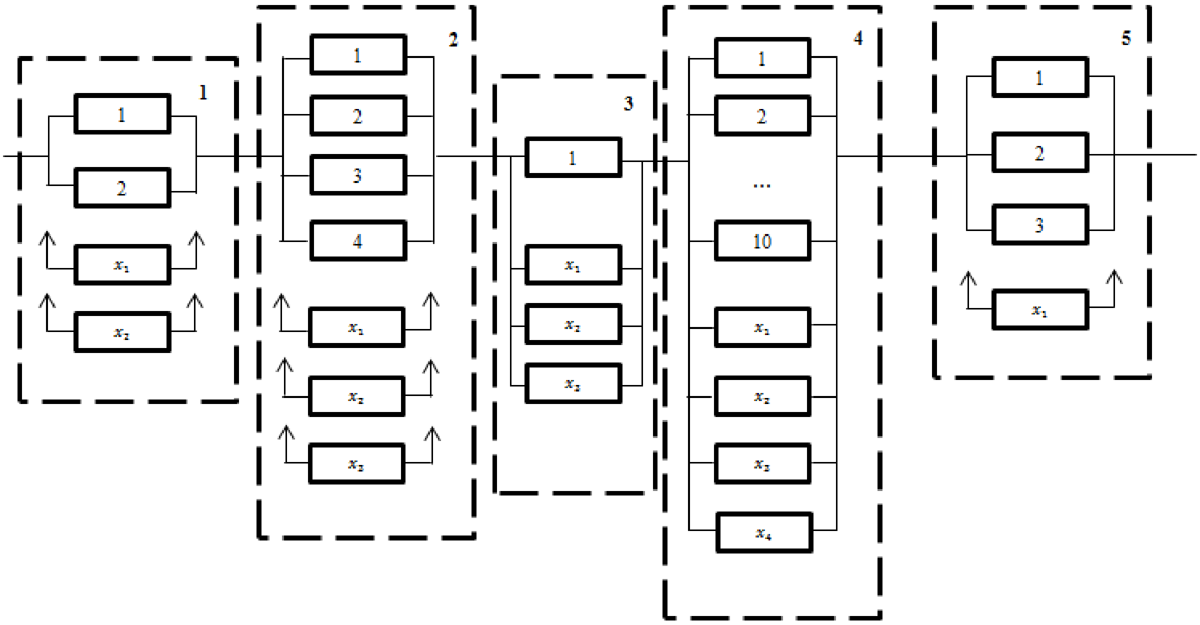

Рис. 3. Структурная схема оптимизированной резервированной системы при $t_д = 2000$

Из данных приведенных в таблице 2 видно, что третья подсистема является самой ненадежной. Для третьей подсистемы используется максимальный ресурс $x_3^* = 4$ $y_3^* = 3$ для первой и второй проблемы оптимального резервирования и $x_3^* = 5$, $y_3^* = 3$ для третьей проблемы оптимального резервирования при $t_д = 850$. В то же время при $t_д = 2000$час основное влияние на функцию готовности оказывает вторая и четвертая подсистемы $x_2^* = 3$, $y_2^* = 3$, $x_4^* = 4$, $y_4^* = 4$. Из этого можно заключить, что алгоритм оптимизации достаточно чувствителен к колебаниям функции готовности.

В данной статье была построена математическая модель оптимального резервирования компьютерной системы предприятия. Так же на примере компьютерной системы состоящей из пяти подсистем были рассмотрены три проблемы оптимального резервирования.

Литература

1. *Тарасик, В.П.* Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – Мн.: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.

2. *Гмурман, В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. - М.: "Высшая школа", 2001. – 404 с.

3. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов – 9-е издание, стер. / В.Е. Гмурман. - М.: "Высшая школа", 2003. – 479 с

4. *Зайцева И.В.* Методы исследования состояний информационной системы // Алгоритмы, методы и системы обработки данных, 2011. - № 2(17).